

CAPITOLO 1

DETERMINAZIONI PLANIMETRICHE

1. Generalità e definizioni sulle operazioni topografiche

1.1. *Punti di inquadramento e di dettaglio*

Nella Parte I si è spiegato che il rilievo topografico consiste nella determinazione plano-altimetrica di un considerevole numero di punti che ci consentano di ricostruire tutti i particolari del terreno. Si è anche detto che tutti questi punti si possono suddividere in due grandi categorie: *punti di inquadramento* e *punti di dettaglio*.

I punti di inquadramento sono in numero notevolmente inferiore ai punti di dettaglio ma costituiscono l'elemento fondamentale di tutto il rilievo; sono perciò determinati con le più raffinate operazioni topografiche e con elevata precisione.

I punti di dettaglio, in numero nettamente superiore, servono per definire tutte le particolarità del terreno e vengono determinati con misure e metodi più speditivi partendo quasi sempre da punti di inquadramento, che in tale evenienza sono considerati privi di errori.

Di seguito vengono descritte le più comuni operazioni topografiche per le determinazioni plano-altimetriche di punti del terreno.

1.2. *Angolo di direzione e distanza*

Si considerino due punti A e B di coordinate note nel piano NE (Fig. 1).

Si definisce *angolo di direzione* della direzione AB presa da A verso B l'angolo di cui la parallela all'asse N condotta per A deve ruotare in senso orario per sovrapporsi alla direzione orientata AB e si indica con la notazione (AB) .

L'angolo di direzione si calcola facilmente note le coordinate dei due punti A e B con

$$\tan(AB) = \frac{E_B - E_A}{N_B - N_A} \quad (1)$$

L'angolo di direzione può assumere tutti i valori compresi tra 0 e 400^g per cui quando se ne calcola il valore con la (1) occorre poter stabilire in quale quadrante si trova; per tale evento vale la regola che l'angolo di direzione appartiene al 1° , 2° , 3°

o 4° quadrante a seconda che i segni del numeratore e del denominatore sono rispettivamente +, +; +, -; -, -; -, +.

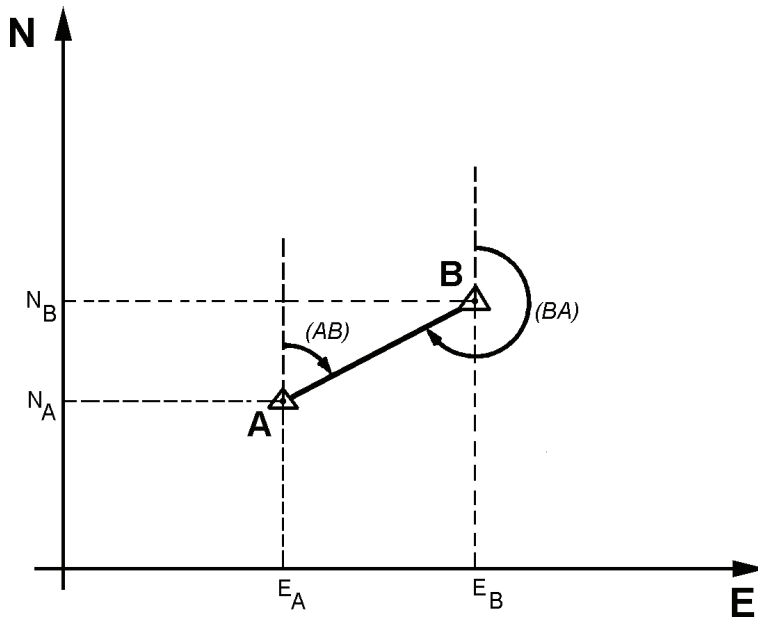


Fig. 1

In altre parole dopo aver calcolato (AB) con la (1) se i segni del numeratore e del denominatore sono entrambi positivi l'angolo è quello risultante dal calcolo (AB) ;

se il numeratore è positivo ed il denominatore negativo l'angolo sarà uguale a $200^g - (AB)$;

se sono entrambi negativi l'angolo sarà uguale a $200^g + (AB)$;

se il numeratore è negativo ed il denominatore positivo l'angolo sarà uguale a $400^g - (AB)$

L'angolo di direzione (BA) si chiama *reciproco* di (AB) e vale ovviamente $(BA) = (AB) \pm 200^g$

dove il segno - va usato quando (AB) è maggiore di 200^g .

Dopo aver calcolato l'angolo di direzione (AB) la *distanza* AB può calcolarsi con le seguenti formule

$$AB = \frac{E_B - E_A}{\text{sen}(AB)} = \frac{N_B - N_A}{\text{cos}(AB)} \quad (2)$$

La distanza AB si può anche calcolare con la formula

$$AB = \sqrt{(N_B - N_A)^2 + (E_B - E_A)^2} \quad (3)$$

nel qual caso potrebbe essere più conveniente determinare l'angolo di direzione successivamente utilizzando la formula (la cui semplice dimostrazione si lascia al lettore)

$$\tan \frac{(AB)}{2} = \frac{E_B - E_A}{AB + N_B - N_A} \quad (4)$$

che ha il pregio di dare il valore di (AB) senza l'indeterminazione del quadrante come invece avviene per la (2).

1.3. Trasporto di un angolo di direzione

Quando si è in presenza di una spezzata di vertici, $P_1 P_2 \dots P_{i-1} P_i P_{i+1} \dots P_n$, di cui sono noti gli angoli $A_1 A_2 \dots A_{i-1} A_i A_{i+1} \dots A_n$ e un angolo di direzione, $(P_{i-1}P_i)$ (Fig. 2), i successivi angoli di direzione possono determinarsi calcolando il reciproco dell'angolo di direzione precedente, aggiungendo l'angolo noto nel vertice e togliendo 400^s quando il risultato del calcolo eccede 400^s , cioè secondo la seguente relazione

$$(P_i P_{i+1}) = (P_i P_{i-1}) + A_i = (P_{i-1} P_i) + 200^s + A_i \quad (5)$$

Questa regola presuppone che nella spezzata si sia individuato un verso di percorrenza e che gli angoli A_i siano sempre quelli che permettono di sovrapporre un lato al successivo con una rotazione oraria.

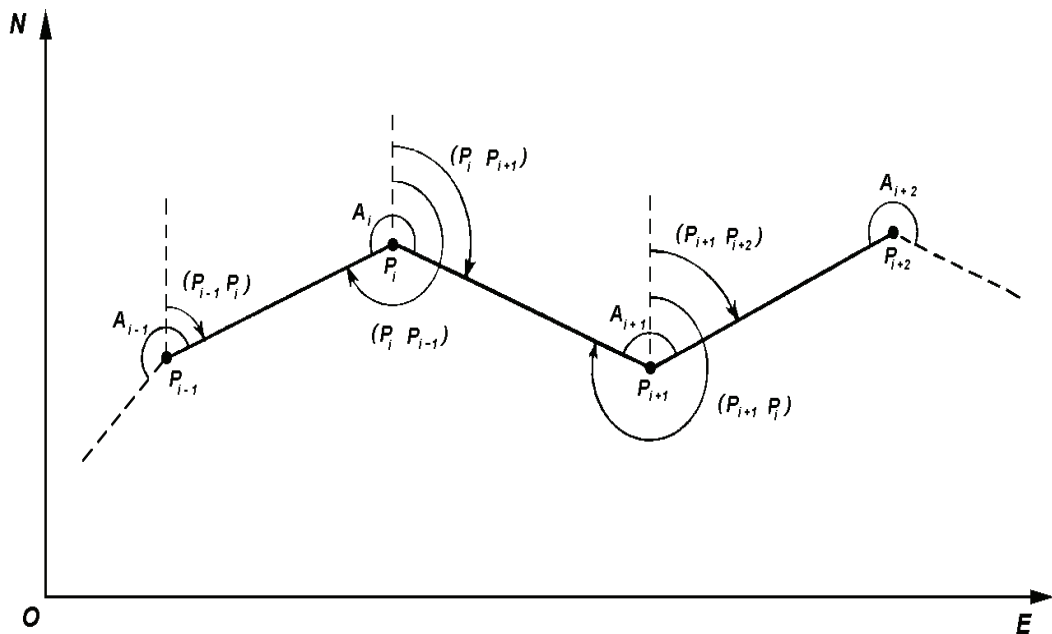


Fig. 2

1.4. Irraggiamento

L'irraggiamento è uno schema di rilievo molto semplice e pratico che con l'avvento dei distanziometri ha notevolmente incrementato la sua portata si da farlo diventare lo schema più usato da tutti i rilevatori.

Per determinare la posizione di un punto basta avere a disposizione due punti di coordinate note, uno su cui fare stazione ed il secondo per orientarsi.

Lo schema è indicato in Fig. 3 dove A e B indicano i punti di coordinate note ed il punto P quello di cui si vogliono determinare le coordinate.

Messo in stazione lo strumento sul punto A si misura l'angolo α e la distanza d dal punto incognito P avendosi così tutti i dati necessari per determinarne le coordinate.

Infatti, essendo l'angolo di direzione (AB) noto e ricavabile con la (1), si determina l'angolo di direzione (AP) con la relazione

$$(AP) = (AB) + \alpha \quad (6)$$

Applicando quindi le (2) si ottengono immediatamente le coordinate del punto P

$$\begin{aligned} E_P &= E_A + d \operatorname{sen}(AP) \\ N_P &= N_A + d \operatorname{cos}(AP) \end{aligned} \quad (7)$$

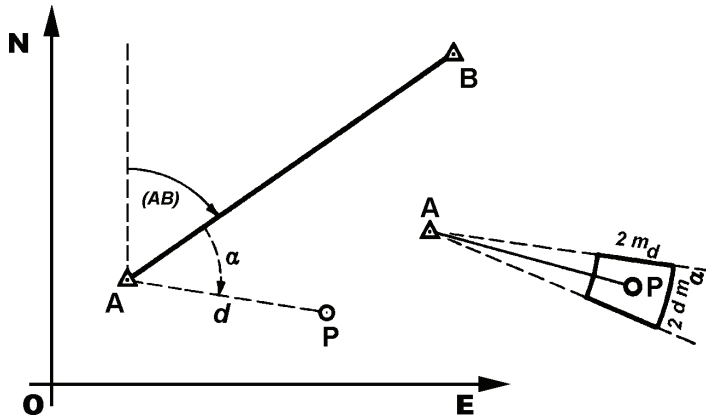


Fig. 3

Volendo determinare l's.q.m. della posizione di P si considerano prive di errore le coordinate dei punti noti A e B e quindi dell'angolo di direzione (AB) . Le coordinate di P essendo funzioni di quantità osservate avranno un s.q.m. pari a

$$\begin{aligned} m_{E_P} &= \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2(AP) m_d^2 + d^2 \operatorname{cos}^2(AP) m_\alpha^2} \\ m_{N_P} &= \pm \sqrt{\operatorname{cos}^2(AP) m_d^2 + d^2 \operatorname{sen}^2(AP) m_\alpha^2} \end{aligned} \quad (8)$$

L's.q.m. della posizione planimetrica di P risulterà

$$m_P = \pm \sqrt{m_{E_P}^2 + m_{N_P}^2} \quad (9)$$

per cui sostituendo le espressioni date dalle (8) si otterrà

$$m_P = \pm \sqrt{m_d^2 + d^2 m_\alpha^2} \quad (10)$$

Quando si esegue un irradimento è buona norma non limitarsi ad un solo orientamento (Fig. 4)

Nell'esempio indicato in Fig. 4 collimando da A più punti di coordinate note e determinando gli angoli α_1 , α_2 , α_3 che le direzioni AB , AC e AD formano con AP , nonché ovviamente misurando la distanza d , si avranno a disposizione tre possibilità per calcolare le coordinate incognite di P .

In tal modo ci si tutela da eventuali *errori grossolani* nella individuazione dei punti noti ed in più si hanno diversi valori delle coordinate di P da cui trarre i valori più probabili (le medie aritmetiche).

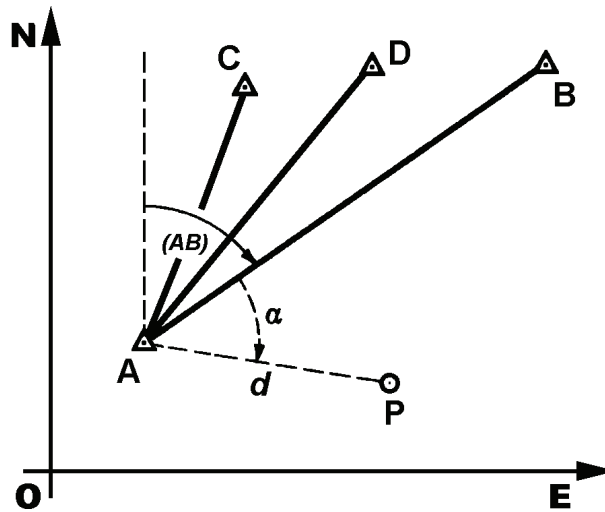


Fig. 4

1.5. Poligonalì non controllate

Le poligonalì non sono altro che irradimenti successivi: è infatti ovvio che dopo aver determinato le coordinate di un punto P_0 per irradimento da un punto noto A , tale punto può considerarsi di coordinate note e quindi essere assunto come stazione per determinare un successivo punto P_1 assumendo come orientamento la precedente stazione di partenza A .

Tale metodo si può ripetere a catena come indicato in Fig. 5

Il metodo è molto utile per determinare le coordinate di punti situati in posti disgiunti da cui non si ha visibilità; fondi-valle, zone fortemente alberate, gallerie.

La sua precisione è però molto scadente giacchè gli effetti degli errori di misu-

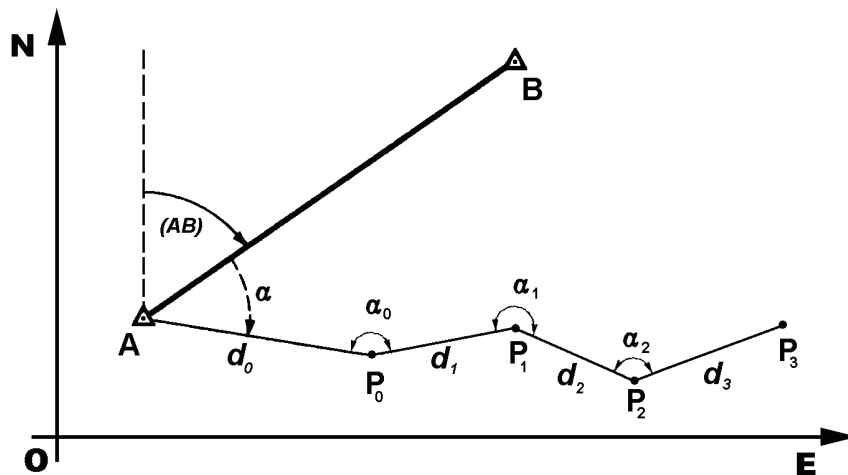


Fig. 5

ra si accumulano di vertice in vertice divenendo rapidamente intollerabili; per tale motivo nessuna normativa di rilevamento ammette l'utilizzo di poligonalì non controllate. Quando la necessità oggettiva le impone (per esempio in galleria), vanno

eseguite con molta accuratezza utilizzando tutti i metodi disponibili per migliorarne la precisione: reiterazioni degli angoli, stazioni con centramento forzato, etc.).

Per il calcolo delle coordinate dei punti, dopo aver misurato in campagna gli angoli $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ e le distanze d_0, d_1, d_2, d_3 , si determinano gli angoli di direzione con la (5) e le coordinate dei punti con le (7).

1.6. Poligonale controllata

Il metodo della poligonale descritto al paragrafo precedente aumenta notevolmente di precisione se si opera in modo che l'ultimo vertice sia anche esso un punto di coordinate note e da tale vertice se ne possa collimare un altro anch'esso noto.

Si parla in tal caso di *poligonale aperta appoggiata agli estremi* (Fig. 6).

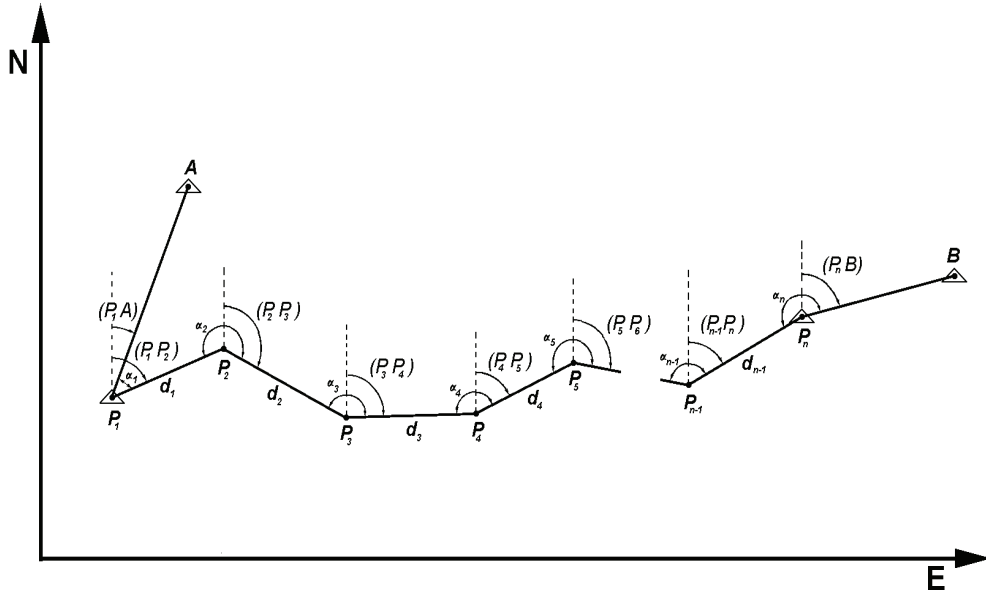


Fig. 6

Il vantaggio di tale modo di procedere consiste nel fatto che si hanno misure sovrabbondanti, rappresentate dalle due coordinate note del punto P_n e dall'angolo α_n e ciò permette di eseguire un controllo su tutte le misure eseguite, verificarne la congruità e quindi eseguire la compensazione.

Il calcolo e la compensazione possono essere eseguiti con metodi matematici rigorosi (minimi quadrati) però spesso per poligonali tecniche si preferisce eseguire una compensazione empirica i cui risultati non differiscono eccessivamente da quelli ottenuti con un calcolo rigoroso.

La compensazione empirica viene eseguita prima sugli *angoli* (compensazione *angolare*) e poi sulle *distanze* (compensazione *lineare*).

Dopo aver misurato in campagna tutte le distanze d_i e gli angoli α_i si calcolano con la (1) gli angoli di direzione (P_1A) e (P_nB) , noti in quanto noti i punti P_1, A, P_n e B

$$\tan(P_1A) = \frac{E_A - E_{P_1}}{N_A - N_{P_1}} \quad \tan(P_nB) = \frac{E_B - E_{P_n}}{N_B - N_{P_n}} \quad (11)$$

Si calcolano quindi, facendo uso della (5) tutti gli angoli di direzione

$$\begin{aligned}
 (P_1P_2) &= (P_1A) + \alpha_1 \\
 (P_2P_3) &= (P_1P_2) + \alpha_2 \pm \pi \\
 (P_3P_4) &= (P_2P_3) + \alpha_3 \pm \pi \\
 &\dots\dots\dots \\
 (P_{n-1}P_n) &= (P_{n-2}P_{n-1}) + \alpha_{n-1} \pm \pi \\
 (P_nB) &= (P_{n-1}P_n) + \alpha_n \pm \pi
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Sommando i primi ed i secondi membri delle (12) ed uguagliando si perviene infine alla

$$(P_nB) = (P_1A) + \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i + k\pi
 \tag{13}$$

dove k è un numero intero che si individua facilmente in sede di calcolo.

Sostituendo nella (13) i valori degli angoli di direzione noti (P_nB) e (P_1A) , supposti privi di errori, a causa degli inevitabili errori accidentali di misura, si otterrà un residuo Δ , detto *errore di chiusura angolare*:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i + (P_1A) - (P_nB) + k\pi = \pm \Delta
 \tag{14}$$

L'errore di chiusura angolare Δ , perché la poligonale sia considerata valida, dovrà risultare in valore assoluto inferiore alla tolleranza; cioè

$$|\Delta| \leq t_\alpha
 \tag{15}$$

La tolleranza angolare t_α viene assegnata a priori in base alla precisione richiesta alla poligonale; ad essa si dà l'espressione

$$t_\alpha = c\sqrt{n}
 \tag{16}$$

con n numero di angoli misurati e c un coefficiente che, per esempio, per i lavori accettati dal catasto vale 4^c . Per poligonali di precisione più elevata può valere anche 15^{cc} .

Se la (15) non è verificata bisogna ripetere tutta la poligonale in campagna; se invece la (15) è verificata si può procedere alla compensazione, cioè alla distribuzione dell'errore di chiusura angolare tra i vari angoli misurati talché il secondo membro della (14) vada a 0.

La compensazione viene effettuata distribuendo l'errore di chiusura in parti uguali tra tutti gli angoli misurati. Per comodità di calcolo si preferisce compensare direttamente gli angoli di direzione calcolati con le (12), cioè a ciascuno degli angoli di direzione si sottrae (se Δ è positivo) o si somma (se Δ è negativo) la quantità

$$\mp \frac{\Delta}{n}
 \tag{17}$$

Questo modo di compensare gli angoli assegnando a ciascuno di essi una quantità uguale dell'errore di chiusura parte dal presupposto che la stessa sia stata rilevata sempre nelle medesime condizioni, cioè utilizzando sempre lo stesso strumento e le identiche condizioni di lettura degli angoli. Ove ciò non si verifichi perché, per esempio, in una poligonale molto lunga e di precisione non elevata, si lavora con due squadre di rilevatori in possesso di strumenti di precisione differente, è evidente che l'errore di chiusura non può essere suddiviso in parti uguali in quanto gli angoli misurati con lo strumento meno preciso saranno portatori di un errore maggiore e quindi gli dovrà essere assegnata una quantità maggiore dell'errore di chiusura

che non per gli angoli misurati con lo strumento più preciso. In tal caso la distribuzione del Δ viene effettuata empiricamente per esempio assegnando a ciascun angolo una correzione inversamente proporzionale allo s.q.m. dello strumento utilizzato per la loro misura.

Dopo aver compensato gli angoli di direzione si hanno tutti gli elementi per determinare le coordinate incognite di tutti i punti tramite le (7).

Si avrà:

$$\begin{aligned} N_{P_2} &= N_{P_1} + d_1 \cos(P_1 P_2) & E_{P_2} &= E_{P_1} + d_1 \operatorname{sen}(P_1 P_2) \\ N_{P_3} &= N_{P_2} + d_2 \cos(P_2 P_3) & E_{P_3} &= E_{P_2} + d_2 \operatorname{sen}(P_2 P_3) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$N_{P_n} = N_{P_{n-1}} + d_{n-1} \cos(P_{n-1} P_n) \quad E_{P_n} = E_{P_{n-1}} + d_{n-1} \operatorname{sen}(P_{n-1} P_n)$$

Sommando i primi membri ed i secondi membri di queste relazioni ed eguagliando si otterrà:

$$N_{P_n} = N_{P_1} + \sum_{i=1}^{i=n-1} d_i \cos(P_i P_{i+1}) \quad E_{P_n} = E_{P_1} + \sum_{i=1}^{i=n-1} d_i \operatorname{sen}(P_i P_{i+1}) \quad (19)$$

Se ora nelle (19) si pongono i valori delle coordinate dei punti noti P_1 e P_n , supposte prive di errori, gli angoli di direzione già compensati e quindi anche essi supposti privi di errori, ed infine le distanze misurate si otterranno degli errori di chiusura dovuti solo agli errori di misura delle distanze.

Si avrà pertanto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n-1} d_i \cos(P_i P_{i+1}) - (N_{P_n} - N_{P_1}) &= \Delta N \\ \sum_{i=1}^{i=n-1} d_i \operatorname{sen}(P_i P_{i+1}) - (E_{P_n} - E_{P_1}) &= \Delta E \end{aligned} \quad (20)$$

Alla quantità

$$\Delta L = \sqrt{\Delta N^2 + \Delta E^2} \quad (21)$$

si da il nome di *errore di chiusura lineare della poligonale*.

Anche per tale errore vale lo stesso discorso fatto per gli angoli; esso deve risultare in valore assoluto inferiore ad una tolleranza assegnata

$$|\Delta L| \leq t_L \quad (22)$$

Alla tolleranza viene assegnata l'espressione

$$t_L = p\sqrt{L} \quad (23)$$

dove L esprime la lunghezza complessiva della poligonale espressa in metri e p è un coefficiente, anche esso espresso in metri, che qualifica la precisione richiesta alla poligonale. Misurando le distanze con un distanziometro p può assumere valori compresi tra 0,001÷0,002 m.

Ove la (22) sia verificata si può procedere alla compensazione dei lati, cioè distribuire l'errore di chiusura tra tutti i lati, o ciò che è lo stesso tra le componenti dei lati, in modo che i secondi membri delle (20) vadano a 0.

Questa distribuzione non avviene però come per gli angoli in parti uguali in quanto gli errori commessi sulle misure delle distanze sono proporzionali alle lunghezze delle stesse: è naturale quindi distribuire l'errore di chiusura in parti proporzionali alla lunghezza di ciascun lato.

Si calcolano quindi le correzioni unitarie con

$$u_N = -\frac{\Delta N}{L} \quad u_E = -\frac{\Delta E}{L} \quad \text{con} \quad L = \sum_{i=1}^{i=n-1} d_i \quad (24)$$

e si ricavano le componenti compensate di ciascun lato con le

$$\begin{aligned} [d_i \cos(P_i P_{i+1})]_c &= d_i \cos(P_i P_{i+1}) + u_N d_i \\ [d_i \sin(P_i P_{i+1})]_c &= d_i \sin(P_i P_{i+1}) + u_E d_i \end{aligned} \quad (25)$$

Con le componenti compensate si determinano infine le coordinate dei punti applicando le (18).

1.7. Poligonale chiusa

La *poligonale chiusa* può considerarsi a tutti gli effetti come un caso particolare della poligonale aperta quando l'ultimo vertice P_n coincide col primo vertice P_1 (Fig. 7)

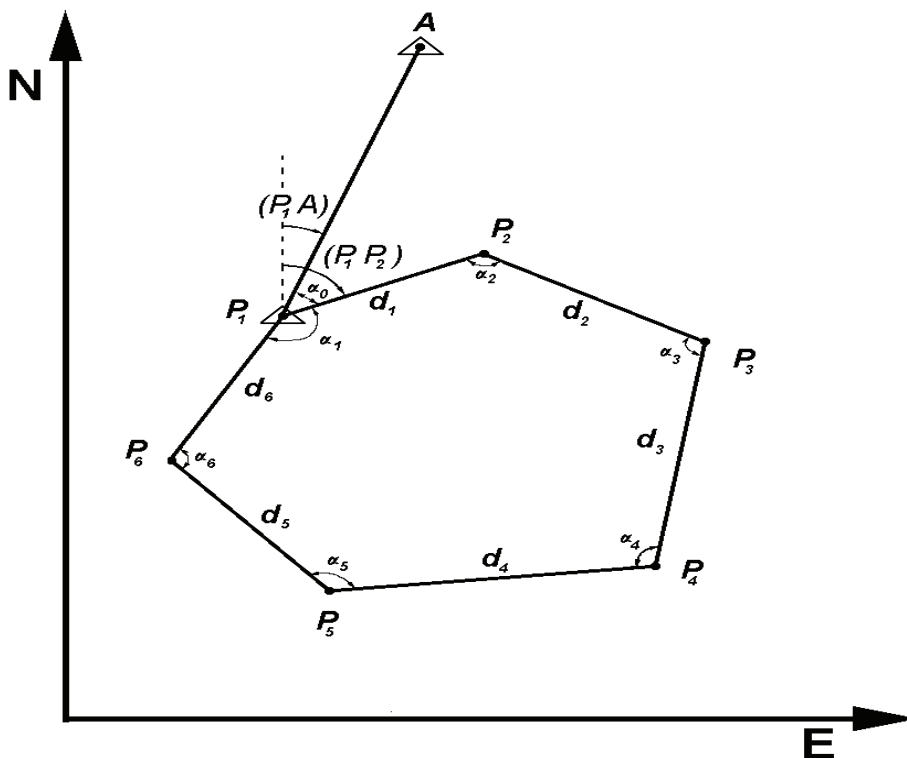


Fig. 7

Nell'esempio indicato in fig, che rappresenta il caso più generale, si tratta di poligonale orientata per cui sono noti sia il punto P_1 che il punto A esterno alla poligonale.

La condizione cui devono soddisfare gli angoli misurati si deriva immediatamente dalla condizione cui devono soddisfare gli angoli interni di un poligono di n lati

$$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i - (n-2)200^g = \Delta \quad (26)$$

L'errore di chiusura Δ , se inferiore alla tolleranza, si distribuisce, cambiato di segno, tra tutti gli angoli misurati in parti uguali.

Le componenti dell'errore di chiusura lineare si calcolano con le

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} d_i \cos(P_i P_{i+1}) = \Delta N$$

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} d_i \sin(P_i P_{i+1}) = \Delta E$$
(27)

L'errore di chiusura lineare ΔL , calcolato tramite la (21), se inferiore alla tolleranza, si distribuisce tra tutti i lati misurati in parti proporzionali alle loro relative lunghezze dopo aver calcolato tramite le (24) le correzioni unitarie.

1.8. Intersezione in avanti

L'*intersezione in avanti* era un metodo molto utilizzato nel passato quando non avendosi a disposizione i distanziometri permetteva la determinazione della planimetria di un punto con sole osservazioni angolari.

Il metodo (Fig. 8) prevede lo stazionamento su due punti, A e B , di coordinate note da cui si possa collimare il punto P incognito e misurare i relativi angoli α e β .

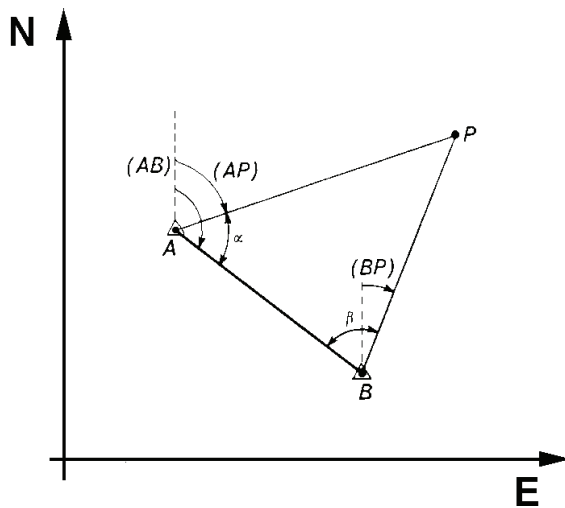


Fig. 8

Essendo nota la distanza AB , calcolabile con la (2) o la (3), ed applicando al triangolo ABP il teorema dei seni si ottiene

$$\frac{AB}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{AP}{\sin \beta} = \frac{BP}{\sin \alpha}$$
(28)

da cui si possono calcolare le distanze AP ed BP .

L'angolo di direzione (AP) si ricava immediatamente con

$$(AP) = (AB) - \alpha$$

essendo l'angolo (AB) noto e calcolabile tramite la (1).

Applicando infine le formule dell'irradiamento (7) si determinano le coordinate incognite del punto P .

Il rilievo si può anche eseguire stazionando nei punti A e P , oppure B e P , nel qual caso prende il nome di *intersezione laterale*. La scelta dell'uno o dell'altro metodo dipende solo da considerazioni pratiche sulle possibilità, o sulla convenienza, di fare stazione sui punti.

Il metodo, come si può notare applicando le (28), si utilizza anche per la determinazione indiretta di una distanza quando, per esempio è materialmente impossi-

bile raggiungere il punto P o quando la distanza da misurare eccede la portata del distanziometro.

1.9. Intersezione multipla

Il metodo dell'intersezione descritto nel paragrafo precedente trova sola applicazione nei rilievi di non elevata precisione. Nella pratica operativa di rilievi di precisione il punto P viene rilevato facendo stazione su più punti noti (Fig. 9) avendo così a disposizione varie possibilità di calcolo delle coordinate incognite.

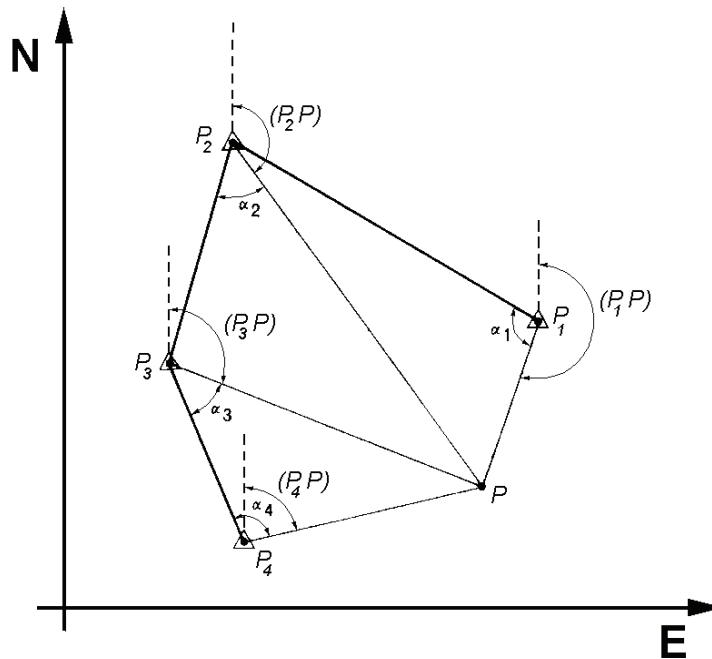


Fig. 9

Nello schema indicato in Fig., dopo aver fatto stazione sui punti noti P_i e misurato gli angoli α_i , applicando il teorema dei seni si determinano le distanze P_iP , quindi si calcolano gli angoli di direzione (P_iP) e successivamente le coordinate del punto incognito P .

Si avranno in tal modo tre valori delle coordinate di P e si potrà constatare la eventuale presenza di errori grossolani e, ove non presenti, assumere la media dei valori come valore più probabile delle coordinate di P .

Ove si voglia un valore più pertinente delle coordinate di P bisognerà far ricorso ad un metodo di compensazione più rigoroso basato sul *principio dei minimi quadrati*.

1.10. Intersezione inversa

Un altro metodo di intersezione, noto come *intersezione inversa* o *problema di Snellius*, detto anche *problema di Pothenot*, permette la determinazione delle coordinate del punto incognito P facendo stazione solo su di esso e misurando gli angoli α

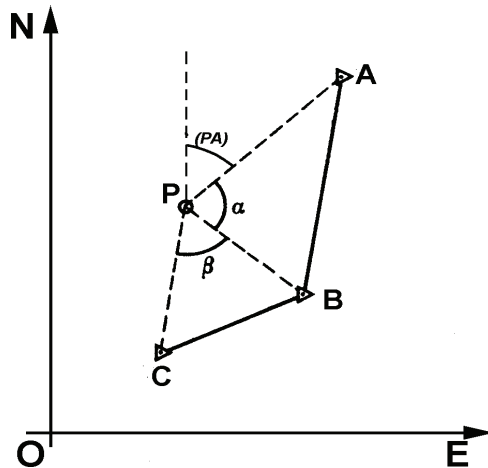


Fig. 10

e β a tre punti incogniti A, B e C (Fig. 10).

La soluzione numerica dell'*intersezione inversa* può essere ottenuta con diversi schemi di calcolo; quello che si propone è dovuto a V. Galkiewictz (1936).

Si considerino gli angoli di direzione

$$(PA) = \gamma$$

$$(PB) = (PA) + \alpha = \gamma + \alpha$$

$$(PC) = (PA) + \alpha + \beta = \gamma + \alpha + \beta$$

Applicando la (1) si otterrà

$$E_A - E_P = (N_A - N_P) \tan \gamma$$

$$E_B - E_P = (N_B - N_A) \tan(\gamma + \alpha)$$

$$E_C - E_P = (N_C - N_P) \tan(\gamma + \alpha + \beta)$$

cioè un sistema di tre equazioni in tre incognite, E_P, N_P e γ che risolto porta alle seguenti soluzioni

$$\tan \gamma = \frac{(E_A - E_B) \cot \alpha + (E_C - E_A) \cot(\alpha + \beta) + N_B - N_C}{(N_A - N_B) \cot \alpha + (N_C - N_A) \cot(\alpha + \beta) + E_C - E_B}$$

$$N_P = \frac{E_B - E_A + N_A \tan \gamma - N_B \tan(\gamma + \alpha)}{\tan \gamma - \tan(\gamma + \alpha)} \quad (29)$$

$$E_P = E_A + (N_P - N_A) \tan \gamma$$

Del problema esiste anche una soluzione geometrica che meglio mette in evidenza i grossi limiti del metodo.

Dopo aver riportato su un foglio in scala opportuna i segmenti AB e BC (Fig. 11) si manda per il punto A una retta che formi un angolo α col segmento AB ; quindi per A si manda la normale a tale retta sino ad intersecare nel punto O_1 la normale alla mezzertica del segmento AB . Si ripete analoga operazione per il punto B riportando l'angolo β sino a determinare il punto O_2 .

Con centro in O_1 si traccia la circonferenza che passa per A , B e P e con centro in O_2 la circonferenza che passa per B , C e P .

Il punto P risulta quindi dall'intersezione delle due circonferenze.

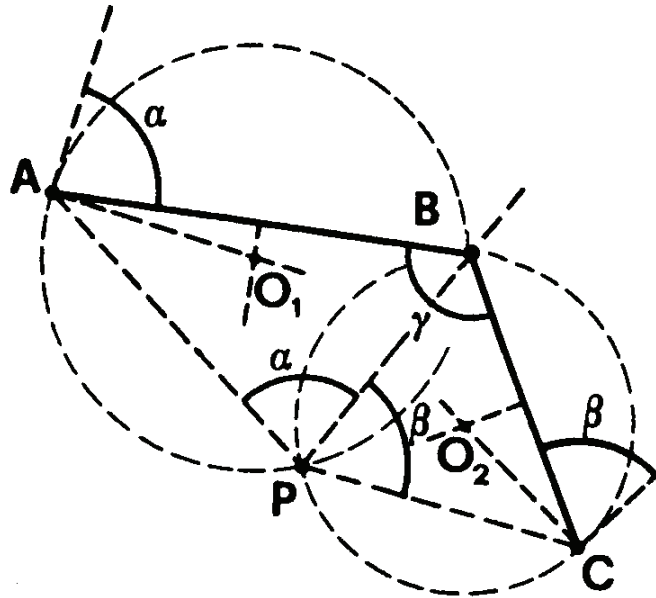


Fig. 11

Il metodo cade in difetto tutte le volte che il punto P appartiene alla circonferenza che passa per A , B e C (Fig. 12 a)) perché in tal caso tutti i punti appartenenti all'arco APC soddisferebbero il problema

E' questo il caso di *indeterminatezza* del problema che rigorosamente si presenta quando la somma degli angoli misurati e dell'angolo noto a loro opposto nel quadrilatero $ABCP$, cioè l'angolo γ , è uguale a 200^s

$$\alpha + \beta + \gamma = 200^s \quad (30)$$

La (30) rappresenta infatti la condizione che un quadrilatero sia inscrittibile in una circonferenza.

Naturalmente è rarissimo nella pratica che la (30) sia esattamente verificata; avviene però spesso che il risultato sia molto prossimo a 200^s . In questo caso il problema, nonostante non sia indeterminato, presenta una grande imprecisione in quanto piccoli errori nella misura di α e β provocano grandissimi errori nella posizione di P .

Nella Fig. 12 b) si può notare che se le due circonferenze sono distinte, ma di centri molto prossimi e raggi quasi uguali, il punto d'intersezione P risulta non nettamente definito dall'intersezione dei due archi in quanto le loro tangenti formano un angolo troppo piccolo.

Il metodo di *Snellius* può pertanto presentare casi di *criticità* che ne ridimensionano il grande vantaggio che consente di determinare la planimetria di un punto semplicemente stazionandovi sopra e misurando gli angoli a tre punti noti visibili.

Per questo motivo il Catasto non lo accetta tra i metodi di rilievo validi per la determinazione delle coordinate di punti.

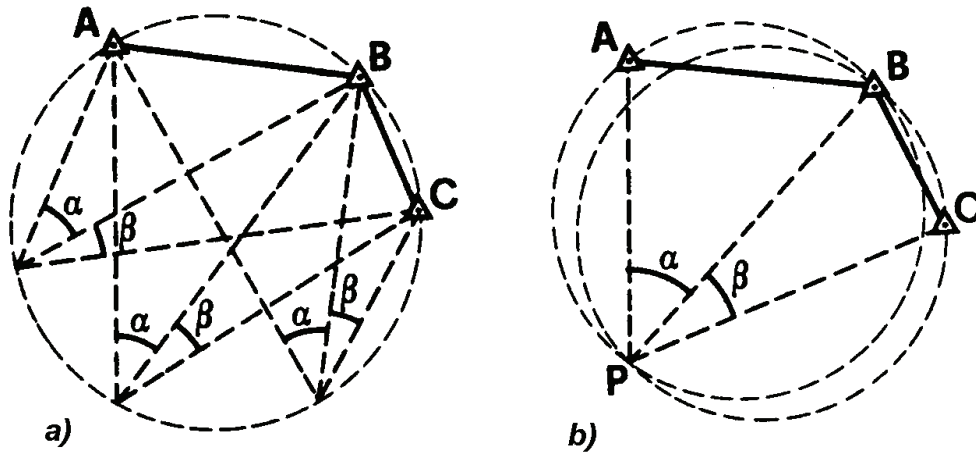


Fig. 12

Data la sua praticità il metodo viene però spesso utilizzato dai topografi che si tutelano contro i casi di criticità collimando più di tre punti noti e possibilmente a giro d'orizzonte; in genere conviene collimare tutti i punti noti visibili dal punto P . Si hanno così a disposizione

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{(n-3)! 3!}$$

coppie di coordinate del punto P incognito, con n numero di punti noti collimati.

L'esame della serie di coordinate permette facilmente di individuare le terne che creano condizioni di criticità in quanto scartano notevolmente dalla media (si manifestano alla stessa stregua degli errori grossolani); tali terne si eliminano dalla serie di coordinate e si assume come valore delle coordinate il valor medio.

Nei casi in cui i punti noti visibili siano pochi (come minimo almeno quattro) la situazione ideale si presenta quando il punto P è situato all'interno del quadrilatero formato dai punti noti perché in questo caso si è sicuri di non incappare nelle condizioni di criticità.

1.11. Triangolazione

Da quando Snellius l'ha impiegata per la prima volta nel 1672, e prima della comparsa dei distanziometri, è stato l'unico metodo usato per la determinazione dei punti di inquadramento o di punti di elevata precisione.

Lo schema è identico a quello dell'intersezione in avanti; l'unica, e *sostanziale*, differenza consiste nel fatto che bisogna fare stazione su tutti i punti (Fig. 13) e misurare i tre angoli del triangolo.

Avendo misurato i tre angoli si può determinare l'errore di chiusura

$$\alpha + \beta + \gamma - 200^s = \Delta$$

che, se inferiore alla *tolleranza* assegnata, si distribuirà, cambiato di segno, in parti uguali ai tre angoli.

La triangolazione quindi, contrariamente a quanto accade per l'intersezione in avanti, permette di eseguire la compensazione delle misure.

Dopo aver eseguito la compensazione le coordinate di P si calcolano nello stesso modo che per l'intersezione inversa.

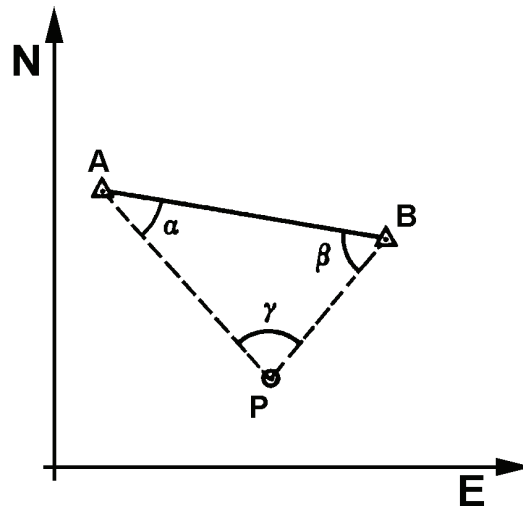


Fig. 13

1.12. Reti geodetiche rilevate mediante tirangolazione

E' stato già detto sull'importanza dei *punti di inquadramento*, in particolare di quelli di primo impianto riguardanti un vasto territorio, come per es. uno Stato o un gruppo di Stati.

Compito di rilevare e gestire tali punti è in genere demandato ad appositi Enti, spesso di derivazione militare. In Italia l'Ente demandato a tale compito è l'*Istituto Geografico Militare Italiano* con sede in Firenze, in sigla "I.G.M.I."

Il rilievo dei *punti di inquadramento* viene sempre effettuato tramite *triangolazioni* che formano una maglia regolare, denominata *rete geodetica*, cercando di avvicinare il più possibile la forma dei triangoli a quella *equilatera*.

Data la necessità di ottenere i punti di inquadramento con una densità media di uno ogni 9 km^2 , per un corretto utilizzo degli utenti, le reti geodetiche vengono suddivise in diversi ordini partendo da una rete fondamentale di inquadramento di tutto il territorio, detta *rete geodetica del primo ordine*, con triangoli che hanno lati di lunghezza variabile da 30 a 50 km.

La *rete geodetica del primo ordine* è in assoluto quella che garantisce le massime precisioni; gli angoli vengono misurati col metodo delle direzioni isolate eseguendo 24 reiterazioni e gli errori di chiusura angolare dei triangoli non devono superare $1",5$ secondi sessagesimali. Essa viene compensata in blocco unico per tutto il territorio.

Successivamente al centro dei triangoli formati dai vertici del primo ordine si dispongono altri vertici che andranno a costituire la *rete geodetica del secondo ordine*. In questo caso i triangoli saranno formati da due vertici del primo ordine, considerati noti e privi di errore, ed uno del secondo, gli angoli saranno misurati con 12 reiterazioni e gli errori di chiusura non dovranno superare i $3",5$ secondi sessagesimali. La loro compensazione sarà effettuata considerando, come detto, i vertici del primo ordine privi di errore.

Il raffittimento successivo determina una serie di vertici che vanno a costituire la *rete geodetica del terzo ordine*; i vertici sono determinati appoggiandosi ai vertici

del 1° e 2° ordine, considerati noti e privi di errori, sempre tramite triangolazioni i cui angoli sono misurati con 6 reiterazioni ed i cui errori di chiusura non devono superare i 6".

Infine l'ultimo raffittimento porta alla disseminazione sul territorio di tutti quei vertici che costituiscono la rete geodetica del quarto ordine. Tutti i vertici del 4° ordine vengono determinati appoggiandosi ai vertici di ordine superiore, supposti noti e privi di errore, e sono determinati anch'essi per triangolazione ma spesso anche per intersezioni multipla in avanti, specie quando sono materializzati da manufatti già esistenti, come campanili.

Tutti insieme i vertici del 1°, 2°, 3° e 4° ordine, indicati anche col nome di punti trigonometrici, costituiscono la rete geodetica dello stato Italiano. Essi vengono segnalizzati sul terreno con molta cura: quelli del 1° e 2° ordine con un pilastrino in calcestruzzo recante due centrini uno in sommità ed uno in profondità; quelli del 3° e 4° senza pilastrino ma sempre con un centrino a livello terreno ed uno in profondità.

Di tutti i punti vengono redatte opportune monografie con i dati necessari al loro ritrovamento e con le loro coordinate plano-altimetriche.

Sulla cartografia ufficiale dello Stato Italiano, anch'essa redatta dall'I.G.M.I., sono riportati con un triangolino con la punta all'insù (Δ).

Per raffittire ancora di più la rete di punti trigonometrici l'I.G.M.I. ha disseminato sul territorio un'altra serie di punti, detti *punti topografici*, determinati quasi sempre per *intersezione multipla in avanti* appoggiandosi ai punti della rete geodetica, supposti noti e privi di errore. In generale essi sono rappresentati da manufatti, quali campanili, antenne, serbatoi d'acqua, torri, fumaioli, fari, etc. Nella cartografia sono indicati con un triangolino con la punta all'ingiù (∇). Sono ovviamente i punti di più scarsa precisione.

1.13. Dimensionamento della rete. Base misurata e base calcolata

Le reti di triangoli descritte al paragrafo precedente ottenute con misure di soli angoli non risultano dimensionate in quanto è noto che avendo a disposizione tre angoli si possono costruire infiniti triangoli che li soddisfino.

Si rende quindi necessario il dimensionamento delle reti per il quale scopo basterebbe la misura di un solo lato in un solo triangolo; applicando il teorema dei seni si potranno facilmente determinare gli altri due lati del triangolo che diventeranno lati noti dei triangoli adiacenti, e così via.

La misura di una lato della rete, dovendo essere eseguito con una precisione elevatissima pari ad 1 mm/km , è stato uno dei problemi più delicati affrontato dai rilevatori, in particolare tenendo presente il periodo in cui la rete Italiana è stata impostata (alla fine del 1800).

La difficoltà materiale di misurare un lato di un triangolo del 1° ordine con i vertici sempre posizionati su cime di montagne ha condotto ad escogitare un metodo indicato col nome di *base misurata*. Si è cioè scelta una ba-

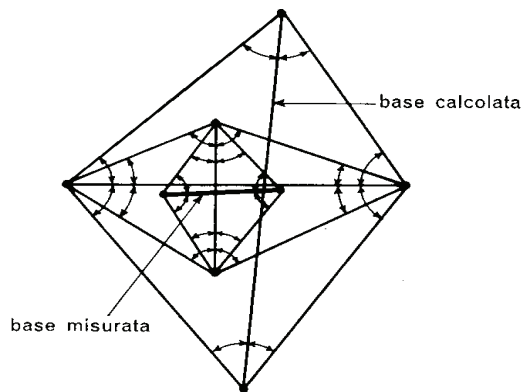


Fig. 14

se in una zona opportuna, in genere pianeggiante, non eccessivamente lunga, variabile dai 3 ai 9 km, che è stata misurata con opportuni apparati fino al raggiungimento della precisione voluta.

Dalla base misurata, mediante una triangolazione di sviluppo eseguita con la massima precisione (per ogni angolo si eseguivano fino a 36 reiterazioni) si giungeva ad inglobare un lato della triangolazione del primo ordine che diveniva così la *base calcolata*.

Nel passaggio dalla base misurata alla base calcolata si perdeva una unità in precisione passando da 10^{-6} a 10^{-5} .

In una rete geodetica di estese dimensioni, come quella italiana, le basi misurate sono più distribuite in maniera strategica su tutto il territorio; si hanno 8 basi misurate.

1.14. Le stazioni astronomiche

Le reti di cui si è parlato nei paragrafi precedenti vengono previste e calcolate sull'ellissoide il quale però deve essere orientato rispetto al geoide.

Si rende quindi necessaria la conoscenza delle coordinate astronomiche e di un azimut di almeno un punto della rete (vedi Parte I —Capitolo 2- par.1.2.) ciò che viene fatto eseguendo una stazione astronomica sul punto.

In Italia, come più volte detto, tale punto è situato a Roma presso l'Osservatorio Astronomico di M.Mario.

Nella rete geodetica Italiana, per un maggior controllo, si fanno più stazioni astronomiche su punti della rete, quasi sempre punti del 1° ordine, opportunamente distribuiti.

1.15. La rete del primo ordine della Sardegna

Si riporta di seguito lo sviluppo della rete del primo ordine in Sardegna(Fig. 15).

Come si può notare la Sardegna è stata collegata alla Penisola passando per la Corsica, utilizzando quindi anche la rete Francese istituita in quell'isola; nel primo impianto invece il collegamento con la penisola italiana era stato fatto in modo autonomo passando per l'isola di Montecristo.

La rete indicata in Fig. 14 è stata ricalcolata nel 1983 misurando anche i quattro lati indicati in rosso (più marcati in bianco e nero) con i distanziometri.

Nel primo impianto la base misurata, della lunghezza di circa 3 km, è stata situata nella piana di Chilivani a ridosso della stazione ferroviaria